Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I – Números complejos

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + i\,b$.

$$\text{i)}\quad (7-2i)(5+3i) \qquad \text{ii)}\quad (i-1)^3 \qquad \text{iii)}\quad \overline{(1+i)(2+i)}(3+i) \qquad \text{iv)}\quad \frac{3+i}{\overline{2+i}}$$

$$\text{v)}\quad \frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} \qquad \text{vi)}\quad (1+i)^{-2} \qquad \text{vii)}\quad \frac{1+2i}{2-i} \qquad \text{viii)}\quad i^2(1+i)^3$$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a) } f_1(z) = \overline{z}^2 \quad \text{b) } f_2(z) = z^3 \quad \text{c) } f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{d) } f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e) } f_4(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a) } |(1+i)(2-i)| \quad \text{b) } \left|\frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right| \quad \text{c) } |(1+i)^{20}| \quad \text{d) } |\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$$

4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:
   a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a) } -\sqrt{3}-i \quad \text{b) } -\sqrt{3}+i \quad \text{c) } \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d) } \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a + i\,b$:

$$\text{a) } (\sqrt{2}+i)^{12} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i}{4-i}\right)^5 \quad \text{c) } \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^8$$

7. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

8. Supuesto que $|z| = 1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

9. Sea $z = x + i\,y$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

10. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

11. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$$

12. Prueba que si una ecuación polinómica con coeficientes reales admite una raíz compleja, z, entonces también admite como raíz a $\overline{z}$. Da un ejemplo de una ecuación polinómica de grado mayor que 1 que tenga como raíz compleja $1+i$ pero no admita como raíz a $1-i$.

13. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

$$\text{a) } z^4+2z^3+7z^2-18z+26=0; \qquad \text{b) } z^4+(5+4i)z^2+10i=0$$

Sugerencia. El número $1+i$ es raíz de la ecuación del apartado a).

14. Demuestra la llamada "igualdad del paralelogramo":

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

15. Dados dos números complejos α y β, calcula el mínimo valor para $z\in\mathbb{C}$ de la cantidad

$$|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2.$$

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

16. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}\,z}\right|<1$ si $|z|<1$ y $|a|<1$ y también si $|z|>1$ y $|a|>1$.
Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

17. Sea w un número complejo de módulo 1. Expresa los números $w-1$ y $w+1$ en forma polar.

18. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)} \quad 1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcula $A+iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

19. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi$.
b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$.

20. Representa gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$|z-3|\leqslant 3; \quad 2<|z-i|\leqslant 3; \quad |\arg z|<\pi/6; \quad |z-i|+|z+i|=4; \quad |z-1|=|z-2i|$$

21. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z=0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

22. Sea $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1+z_2+z_3=0$.

23. Si $0\leqslant \arg w-\arg z<\pi$, prueba que el área del triángulo de vértices 0, z y w viene dada por $\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}w)$.